100cias@uned
Facultad de Ciencias

Vida científica

N.º 11 (2018)
ISSN: 1989-7189

COLABORACIONES EN MATEMÁTICAS

LA COMBINATORIA DE LAS COLORACIONES

INTRODUCCIÓN

Vamos a exponer algunos resultados importantes en la teoría de Ramsey sobre coloraciones. Se trata de un campo de las matemáticas englobado dentro de la combinatoria. Parafraseando a varios autores "*hay numerosos teoremas en matemáticas que afirman, grosso modo, que cualquier sistema de un cierto tipo siempre tiene un subsistema relativamente grande con más grado de organización que el sistema original*".

Ilustremos esto con dos ejemplos: En una reunión con al menos $2n-1$ personas, al menos n entre ellas tienen el mismo sexo.

El segundo es un poco más complejo: Queremos saber si en un conjunto de personas $\{P_1,\ldots,P_n\}$ podemos encontrar al menos tres personas P_{n1},P_{n1},P_{n2} que se conocen entre sí, o que ninguna de ellas se conoce entre sí. El "sentido común" nos dice que, si el conjunto es suficientemente grande, esto será así. La cuestión es, primero saber si esto es siempre cierto, y si eso es así, estimar el menor de esos números n.

Veamos que n es como mínimo seis:

Podemos tener un conjunto P_1,P_2,P_3,P_4,P_5 tal que P_i y P_{i+1} se conocen para cada i=1,2,3,4 y también P_5 y P_1 se conocen entre sí, y ningún otro par de personas se conoce. En esta situación no existen tres personas como queremos. En la siguiente gráfica, las aristas coloreadas con rojo indican que las personas correspondientes se conocen y las que están coloreadas con azul indican que no.

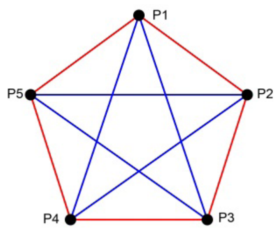

Figura 1. $R_{2,2}(3)\geq 6$.

Por otro lado, seis es suficiente: Nos fijamos en quien conoce o no la primera persona P_1; de las cinco personas restantes debe haber un subconjunto S de tres personas tal que P_1 conoce a todas las personas de S o a ninguna de ellas. Supongamos que P_1 conoce a todas ellas; si en S hay dos personas P_{n1},P_{n2} que se conocen entre sí, entonces en el conjunto $\{P_1,P_{n1},P_{n2}\}$ todos se conocen entre sí; si en S todos son desconocidos, entonces S es uno de los conjuntos que buscamos. El caso en el que P_1 desconoce a todos las personas de S se trata de la misma manera.

COMBINATORIA FINITA

El ejemplo que acabamos de explicar es un caso particular de un principio matemático, denominado *Teorema de Ramsey*, demostrado por el filósofo y matemático *F.P. Ramsey*, y que se puede decir es el origen de la teoría de las coloraciones. Para enunciar correctamente el resultado, vamos a introducir una notación estándar: $\mathbb{N}$ es el conjunto de los números enteros no negativos; dado un entero no negativo $n\in\mathbb{N}$, escribiremos $[n]$ para denotar el conjunto $\{1,2,\ldots,n\}$. Dado un conjunto X, y un número natural n, denotemos por $[X]^n$ a la colección de todos los subconjuntos de X que tienen exactamente n elementos.

Para simplificar la notación, escribiremos $[n]^d$ en vez de $[[n]]^d=[\{1,\ldots,n\}]^d$. Una *r-coloración* de un conjunto es una coloración de sus elementos utilizando r colores.

Figura 2. Frank Plumpton Ramsey. Fuente: https://en.wikipedia.org/wiki/Frank_P._Ramsey.

> **Teorema.** *[1] Dados números naturales d,m y r, existe un número n tal que para todo conjunto X con al menos n elementos y para toda r-coloración de* $[X]^d$ *existe un subconjunto Y de X con m elementos tal que todos los subconjuntos de Y con d elementos tienen el mismo color. Al menor de esos n lo denotaremos por* $R_{d,r}(m)$.

El ejemplo sobre las personas se modeliza con el caso $d=r=2$ y $m=3$, y hemos visto que $R_{2,2}(3)=6$. En general, El teorema de Ramsey tiene una sencilla demostración por inducción sobre d, utilizando las mismas ideas que hemos utilizado en el ejemplo de la reunión con seis personas. Estimar *los números de Ramsey* $R_{d,r}(m)$ tiene gran interés y dificultad. El teorema de Ramsey y variaciones de él ha sido muy usado tanto en otras áreas de la matemática como, por ejemplo, en informática teórica (estudio de algoritmos) o en teoría de la información (ver [2] para más información).

Pasemos a enunciar unos resultados donde el orden buscado es de tipo geométrico o aritmético.

Organización geométrica: El Teorema de Hales-Jewett

Es bien sabido que en el juego de *tres en raya* cada jugador tiene una estrategia para acabar en tablas, independientemente de los movimientos del oponente. Podemos modelizar matemáticamente el juego de tres en raya como sigue: hay dos jugadores que eligen alternadamente una casilla no escogida anteriormente, que vamos a etiquetar con (i,j), $i,j\in\{-1,0,1\}$. El juego termina cuando uno de los jugadores ha conseguido "3 en raya", es decir, una línea horizontal o vertical

$$H_j:=\{(-1,j),(0,j),(1,j)\},\ V_j:=\{(j,-1),(j,0),(j,1)\},$$
$$\text{con } j=-1,0,1,$$

o una diagonal o anti-diagonal

$$D:=\{(-1,-1),(0,0),(1,1)\},\ AD:=\{(-1,1),(0,0),(1,-1)\}.$$

En el caso de su versión 3 dimensional, y donde cada uno de los jugadores escoge ahora una casilla indexada por t parámetros (i,j,k) con $i,j,k\in\{-1,0,1\}$, si el primer jugador escoge la casilla central del cubo 3D siempre gana. Nos podríamos preguntar si hay alguna estrategia para alguno de los jugadores con la cual al final del juego se acabara en tablas.

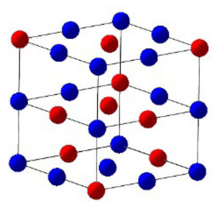

Figura 3. W(3,3)≥27.

Y la respuesta es que no, de una manera mucho más general: Consideremos un juego con r jugadores que escogen una casilla $(i_1,\ldots,i_N)$ de un hipercubo (discreto) N-dimensional

$$\{-m,\ldots,-1,0,-1,\ldots,m\}^N.$$

Cada uno de los jugadores decide escoger o no una casilla. El juego termina cuando uno de los jugadores llega a escoger N-en raya, o sea, un conjunto de la forma

$$\{\ (a_1,\ldots,a_N)+c\cdot(b_1,\ldots,b_N)\mid c\in\{0,\ldots,2m\}\ \}$$

para ciertos $(a_1,\ldots,a_N)$ y $(b_1,\ldots,b_N)$ cumpliendo las siguientes condiciones: a) cada $b_j=-1,0,1$; b) si $|a_j|<m$, entonces $b_j=0$; c) si $|a_j|=m$, entonces $b_j=0$ o $b_j=-a_j/|a_j|$, y d) hay algún j tal que $b_j\neq 0$. El Resultado de Alfred W. Hales y Robert I. Jewett nos dice.

> **Teorema.** *[3] Si N es lo suficientemente grande, sea cual sea la manera que cada uno de los jugadores juegue, al final el juego siempre acaba con algún N-en raya.*

Organización aritmética: Teoremas de Van der Waerden y Folkman

Imaginemos que ahora coloreamos los números naturales $[N]:=\{1,\ldots,N\}$ con r colores y nos preguntamos si será cierto que podemos encontrar elementos "con estructura aritmética" con el mismo color, por ejemplo, una progresión aritmética

$$a, a+b, a+2\cdot b, \ldots, a+k\cdot b.$$

El teorema de B.L. Van der Waerden dice que esto siempre es posible, para N suficientemente grande.

La demostración es bastante más compleja que la del Teorema de Ramsey. Al menor entero N con esta propiedad se le denomina $W(k,r)$. Se puede demostrar que $W(3,3)=28$. A continuación, ponemos un ejemplo de una coloración con tres colores amarillo, rojo y azul de los 27 primeros números enteros positivos para la que no podemos encontrar ninguna progresión aritmética en uno de los colores.

Supongamos ahora que lo queremos es encontrar en uno de los colores muchos enteros positivos y la suma

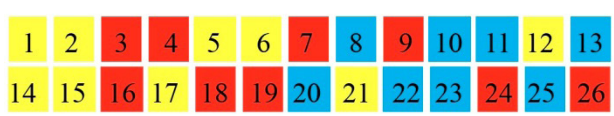

Figura 4. W(2,2)≥27. Modificada de: http://datagenetics.com/blog/august12017/index.html.

entre ellos. Este es el resultado conocido como teorema de Folkman, en honor al matemático Jon Folkman, y demostrado independientemente por varios matemáticos (ver Teorema 11 en [5]).

> **Teorema.** *Para cualesquiera enteros positivo m y r existe un número entero positivo N tal que en toda r-coloración de $[N]$, en uno de los colores podemos encontrar m enteros y todas las sumas (sin repetición) de ellos.*

Es interesante remarcar que en 1916 I. Schur demuestra la siguiente versión reducida del teorema de Folkman y que se considera el primer resultado en la teoría de Ramsey: Para todo $r \in \mathbb{N}$ existe un N con la propiedad de que en toda coloración de $[N]$ utilizando r colores se puede encontrar en uno de los colores dos enteros positivos m y n y su suma $m+n$.

El teorema de Ramsey dual

Finalizamos esta breve exposición de teoremas en combinatoria finita con el que se puede considerar el resultado más complejo de los presentados. Es el teorema de Ramsey *dual*. Fue demostrado por R.L. Graham y B.L. Rothschild. Para enunciarlo, necesitamos introducir el concepto de partición: Dado un conjunto X, una partición $\mathcal{P}$ es una colección de partes de X que son disjuntas dos a dos y que recubren todo X.

Figura 5. R.L. Graham y B.L. Rothschild.

> **Teorema.** *[6] Dados enteros positivos d, m y r existe un entero positivo N tal que en toda r-coloración del conjunto de d-particiones $\mathcal{P}_d(N)$ existe una m-partición $\mathcal{P}$ de $[N]$ tal que cualquier d-partición formada a partir de juntar piezas de $\mathcal{P}$ tiene siempre el mismo color.*

Diremos que una partición $\mathcal{P}$ de X es una d-partición si el número partes en $\mathcal{P}$ es exactamente d. A la familia de todas las d-particiones de X la denotaremos por $\mathcal{P}_d(X)$.

El Método probabilístico

La mayoría de las demostraciones de los resultados anteriores son de naturaleza puramente combinatoria; muchas de ellas están llenas de "trucos" y da la sensación de que no hay estrategias generales. Sin embargo, existe un método, llamado *probabilístico*, que es muy útil en estos y otros estudios matemáticos.

La filosofía de este método, debido a Paul Erdős, consiste, entre otros, en los siguientes principios:

- si todos los objetos de una colección no tienen una propiedad, entonces la probabilidad de que un objeto escogido al azar tenga dicha propiedad es cero;
- su principio dual, si la probabilidad de que un objeto escogido al azar tenga una propiedad dada no es 1, entonces debe haber algún objeto en la colección que no tenga la propiedad.

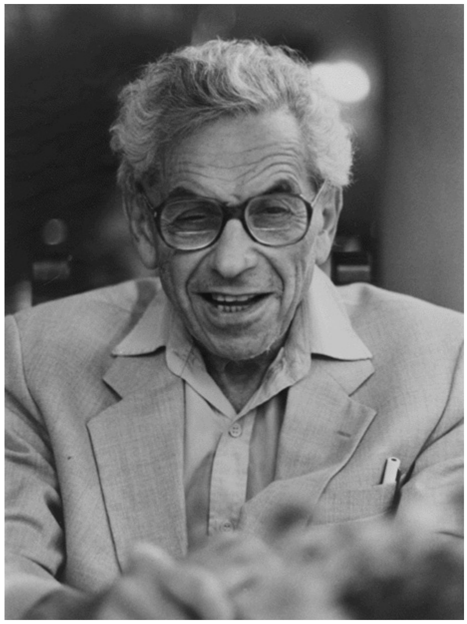

Figura 6. P. Erdős. Fuente: https://oakland.edu/enp.

Recomendamos el libro [7] para explicaciones más completas. Vamos a ilustrar el método con un ejemplo, también debido a Erdős. Se trata de estimar de manera probabilística cotas inferiores de los números de Ramsey $R_{2,2}(m)$ y observar que, fijado $m \in \mathbb{N}$, cuando n es pequeño con respecto a m, entonces se puede encontrar una 2-coloración de $[n]^2$ sin que haya ningún monocromático de la forma $[S]^2$ con S de cardinalidad m. De hecho, vamos a ver que $R_{2,2}(m) \geq 2^{(m/2)}$: Para ello, coloreamos el grafo $[n]^2$ de manera aleatoria, coloreando cada $\{i,j\}$ de manera independiente con color rojo con probabilidad 1/2 o con color azul también con probabilidad 1/2. Dado ahora un subconjunto S de $[n]$ de cardinalidad m, la probabilidad de que $[S]^2$ sea todo rojo es 1/2 veces el número elementos de $[S]^2$, que es $\binom{m}{2}$, y lo mismo de que $[S]^2$ sea todo azul. Es decir, la probabilidad de que $[S]^2$ sea monocromático es $2 \cdot 2^{-\binom{m}{2}}$. Como tenemos $\binom{n}{m}$ subconjuntos de $[n]$ de cardinalidad m, la probabilidad de que al menos haya un monocromático de la forma $[S]^2$ con S de cardinalidad m es

$$\binom{n}{m} 2^{1-\binom{m}{2}}$$

Si se cumple que n es tan pequeño que $\binom{n}{m} < 2^{\binom{m}{2}-1}$, entonces dicha probabilidad es estrictamente menor que 1 y por tanto para dicho n debe haber una 2-coloración de $[n]^2$ sin monocromáticos del tipo $[S]^2$ con S de cardinalidad m.

Este argumento es claramente no constructivo. De hecho, encontrar "malas" coloraciones es en general muy difícil, aunque analizando el número

$$\alpha := \binom{n}{m} 2^{1-\binom{m}{2}}$$

para $n \approx 2^{\binom{m}{2}}$ nos damos cuenta de que α es muy pequeño. En otras palabras, la probabilidad de encontrar un contraejemplo es muy alta.

COMBINATORIA INFINITA

Hay versiones infinitarias de los resultados anteriormente expuestos, aunque, como veremos más tarde, hay que precisar en cada caso qué se entiende por infinita. Estas versiones infinitarias generalizan los teoremas presentados anteriormente, y a partir de ellas, utilizando un argumento de *compacidad*, se pueden demostrar las versiones finitarias. Empecemos por el teorema de Ramsey en $\mathbb{N}$, el conjunto de enteros no negativos.

> **Teorema.** *[1] Si coloreamos la colección $[\mathbb{N}]^d$ de los conjuntos de números naturales de cardinalidad d con un número finito de colores, siempre existe un conjunto infinito cuyos subconjuntos de cardinalidad d todos tienen el mismo color.*

Este teorema se demuestra de manera parecida al teorema de Ramsey. Existen versiones infinitarias del teorema de Van der Waerden: La versión natural infinita diría que para toda r-coloración de $\mathbb{N}$ se cumple que en uno de los colores se puede encontrar una progresión aritmética infinita. Sin embargo, este resultado es falso. Utilizando que el número de progresiones aritméticas es numerable, con un argumento diagonal se puede producir una coloración finita de $\mathbb{N}$ con la propiedad de que ningún color contiene una progresión aritmética infinita. El resultado correcto es el siguiente:

> **Teorema.** *[4] En toda coloración finita de $\mathbb{N}$ hay un color que tiene progresiones aritméticas arbitrariamente largas.*

El teorema de Folkman tiene también la siguiente versión infinitaria, demostrada por N. Hindman, y que tiene una demostración muy elegante utilizando los denominados *ultrafiltros idempotentes*.

> **Teorema.** *[8] En toda coloración finita de $\mathbb{N}$ hay uno de los colores que tiene un conjunto infinito $\mathcal{P}$ y todas las sumas de elementos distintos de $\mathcal{P}$.*

Se tiene una versión infinita del teorema de Hales-Jewett, aunque no la incluiremos aquí. Existe también otro tipo de versiones infinitas de los resultados anteriores. Para ilustrarlo mencionaremos el Teorema de *Galvin-Prikry*. En el teorema de Ramsey se colorean los subconjuntos finitos de cardinalidad exactamente d. ¿Se puede tener un resultado similar cuando se colorean los subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$? De manera precisa, dado un conjunto A de enteros positivos, denotemos por $[A]^\infty$ a la familia de todos los subconjuntos de A que son infinitos. Nos preguntamos por la veracidad del siguiente resultado: ¿es cierto que para toda coloración finita de $[\mathbb{N}]^\infty$, en uno de los colores tenemos un conjunto infinito A y todos sus subconjuntos infinitos? Este resultado es falso en general, aunque la coloración mala es "artificial", al estar construida utilizando el axioma de elección. Dana Scott en un seminario de Stanford en 1967 preguntó si este resultado podría ser cierto para coloraciones "definibles". F. Galvin y K. Prikry demostraron lo siguiente.

> **Teorema.** *[9] En toda coloración finita boreliana de $[\mathbb{N}]^\infty$ hay uno de los colores que tiene un subconjunto infinito A de $\mathbb{N}$ y todos los subconjuntos infinitos de A.*

Una coloración boreliana de $[\mathbb{N}]^\infty$ es aquella para la que todos los colores son familias borelianas de $[\mathbb{N}]^\infty$. Intuitivamente, y sin entrar en muchos detalles, una familia de Borel es aquella que es "razonablemente" definible. Por ejemplo, la familia de todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$ que contienen los enteros 2,3,4, o la familia de los subconjuntos de $\mathbb{N}$ que contienen n enteros consecutivos son ambas borelianas.

Finalizaremos mencionando algunos resultados de combinatoria infinita no numerable, un campo iniciado principalmente por P. Erdős, A. Hajnal y R. Rado (ver [10,11]. Recordemos que un conjunto infinito X es numerable cuando X y $\mathbb{N}$ son equipotentes, es decir, cuando existe una biyección entre X y $\mathbb{N}$. Nos preguntamos ahora si existe un conjunto infinito X tal que siempre que coloreemos $[X]^2$ con dos colores existe un subconjunto $A \subset X$ equipotente con X tal que $[A]^2$ es monocromático. Sabemos que la respuesta es que sí para para conjuntos numerables (es el teorema de Ramsey infinito). Pero ¿existen conjuntos no numerables con estas propiedades? Se puede demostrar que muchos conjuntos no tienen esa propiedad: Los números reales $\mathbb{R}$, los primeros cardinales infinitos no numerables $\aleph_n$ con $n \in \mathbb{N}$, y muchos otros. Por otro lado, no es posible demostrar dentro de la matemática estándar la existencia de un conjunto no numerable con la propiedad requerida, debido a unos de los teoremas de Incompletitud de la matemática demostrado por K. Gödel (ver [12]).

REFERENCIAS

[1] Ramsey FP (1929). On a Problem of Formal Logic. *Proceedings of the London Mathematical Society* **2**, 264–286.

[2] Rosta V (2004). Ramsey theory applications. *The Electronic Journal of Combinatorics* **11**, 48.

[3] Hales AW, Jewett RI (1963). Regularity and positional games. *Transactions of the American Mathematical Society* **106**, 222–229.

[4] van der Waerden BL (1927). Beweis einer Baudetschen Vermutung. *Nieuw Archief voor Wiskunde* **15**, 212–216.

[5] Graham RL, Rothschild BL, Spencer JH (1990). Ramsey theory. Paperback edition of the second (1990) edition (Vol. 2013). John Wiley & Sons, Hoboken, Nueva Jersey.

[6] Graham RL, Rothschild BL (1971). Ramsey's theorem for n-parameter sets. *Transactions of the American Mathematica Society* **159**, 257-292

[7] Alon N, Spencer JH (2016). The probabilistic method. Fourth edition. Wiley Series in Discrete Mathematics and Optimization. John Wiley & Sons, Hoboken, Nueva Jersey.

[8] Hindman N (1974). Finite sums from sequences within cells of a partition of N. *Journal of Combinatorial Theory, Series A* **17**, 1-11.

[9] Galvin F, Prikry K (1973). Borel sets and Ramsey's theorem. *The Journal of Symbolic Logic* **38**, 193-198.

[10] Erdős P, Hajnal A (1971). Unsolved problems in set theory. *Axiomatic Set Theory (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XIII, Part I, Univ. California, Los Angeles, Calif., 1967)*, 17–48.

[11] Erdős P, Hajnal A (1974). Unsolved and Solved Problems in Set Theory. *Proceedings of the Tarski Symposium (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XXV, Univ. California, Berkeley, Calif., 1971)*, 269–287.

[12] Kanamori A (2003). The Higher Infinite. Large Cardinals in Set Theory from Their Beginnings, 2ª ed. Springer, Berlín.

Jorge López Abad

Dpto. de Matemáticas Fundamentales